F Ü G G E L É K:

173.1., 207.1.

173.1.

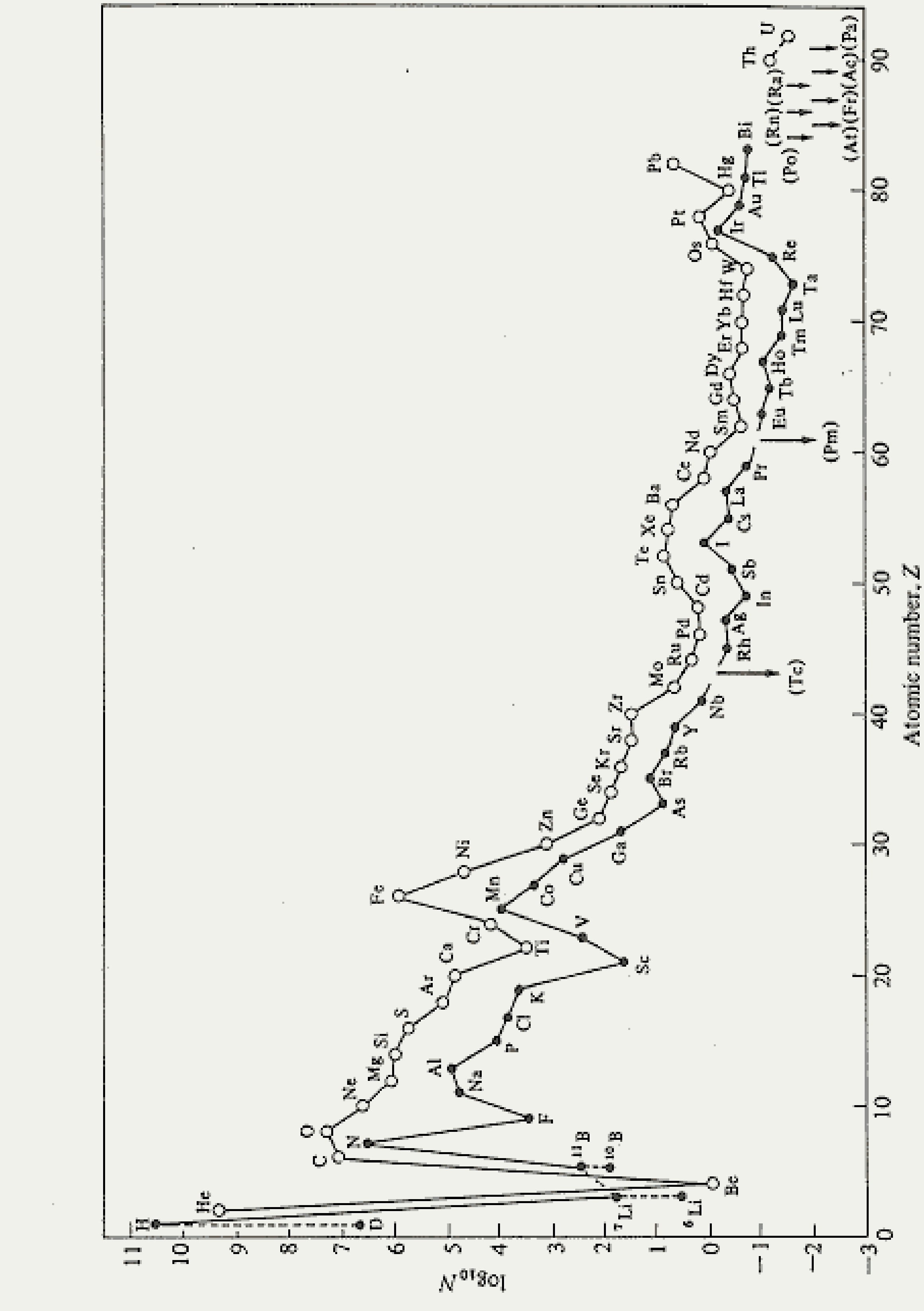


Fig. 1.1 Cosmic abundances of the elements as a function of atomic number Z. Abundances are expressed as numbers of atoms per 10^6 atoms of Si and are plotted on a logarithmic scale. (From A. G. W. Cameron, *Space Sci. Rev.* 15, 121–46 (1973), as updated by Brian Mason, private communication.)

207.1.

Példák a σ_{nili} számitására:

1. $C: 1s^2 2s^2 2p^2$

$\sigma_{10} = f_{10} = 0{,}30;$
$\sigma_{20} = 2\cdot f_{10} + f_{20} + 2\cdot f_{21} = 2\cdot 0{,}85 + 0{,}35 + 2\cdot 0{,}35 = 2{,}75;$
$\sigma_{21} = 2\cdot f_{10} + 2\cdot f_{20} + f_{21} = 2\cdot 0{,}85 + 2\cdot 0{,}35 + 0{,}35 = 2{,}75.$

2. $Mg: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$

$\sigma_{10} = f_{10} = 0{,}30;$
$\sigma_{20} = 2\cdot f_{10} + f_{20} + 6\cdot f_{21} = 2\cdot 0{,}85 + 0{,}35 + 6\cdot 0{,}35 = 4{,}15;$
$\sigma_{21} = 2\cdot f_{10} + 2\cdot f_{20} + 5\cdot f_{21} = 2\cdot 0{,}85 + 2\cdot 0{,}35 + 5\cdot 0{,}35 = 4{,}15;$
$\sigma_{30} = 2\cdot f_{10} + 2\cdot f_{20} + 6\cdot f_{21} + f_{30} = 2\cdot 1{,}00 + 2\cdot 0{,}85 +$
$+ 6\cdot 0{,}85 + 0{,}35 = 9{,}15.$

3. $Fe: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$

$\sigma_{10} = 0{,}30; \sigma_{20} = \sigma_{21} = 4{,}15;$
$\sigma_{30} = 2\cdot f_{10} + 2\cdot f_{20} + 6\cdot f_{21} + f_{30} + 6\cdot f_{31} = 2\cdot 1{,}00 + 8\cdot 0{,}85 +$
$+ 7\cdot 0{,}35 = 11{,}25; \sigma_{31} = 11{,}25;$
$\sigma_{32} = 2\cdot f_{10} + 2\cdot f_{20} + 6\cdot f_{21} + 2\cdot f_{30} + 6\cdot f_{31} + 5\cdot f_{32} = 2\cdot 1{,}00 +$
$+ 2\cdot 1{,}00 + 6\cdot 1{,}00 + 2\cdot 1{,}00 + 6\cdot 1{,}00 + 5\cdot 0{,}35 = 19{,}75;$
$\sigma_{40} = 2\cdot f_{10} + 2\cdot f_{20} + 6\cdot f_{21} + 2\cdot f_{30} + 6\cdot f_{31} + 6\cdot f_{32} + f_{40} =$
$= 2\cdot 1{,}00 + 2\cdot 1{,}00 + 6\cdot 1{,}00 + 2\cdot 0{,}85 + 6\cdot 0{,}85 + 6\cdot 0{,}85 +$
$+ 0{,}35 = 22{,}25.$

M A T E M A T I K A I

B E V E Z E T É S

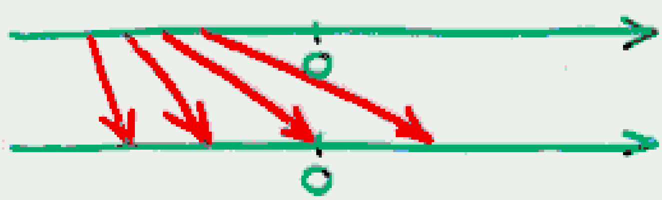
1. Függvények

A fv. (f) tkp. a számegyenes pontjainak (x, a FÜGGETLEN VÁLTOZÓ értékei) hozzárendelése a számegyenes egy-egy pontjához (y, a FÜGGŐ VÁLTOZÓ értéke).

FV.
- VALÓS: x és y értéke valós szám
- KOMPLEX: x vagy/és y értéke komplex sz.

FV.
- EGYVÁLTOZÓS: y értéke csak egy x értékétől,
- n-VÁLTOZÓS: y értéke n db. x értékétől ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) függ.

1.1. Egyváltozós valós függvények

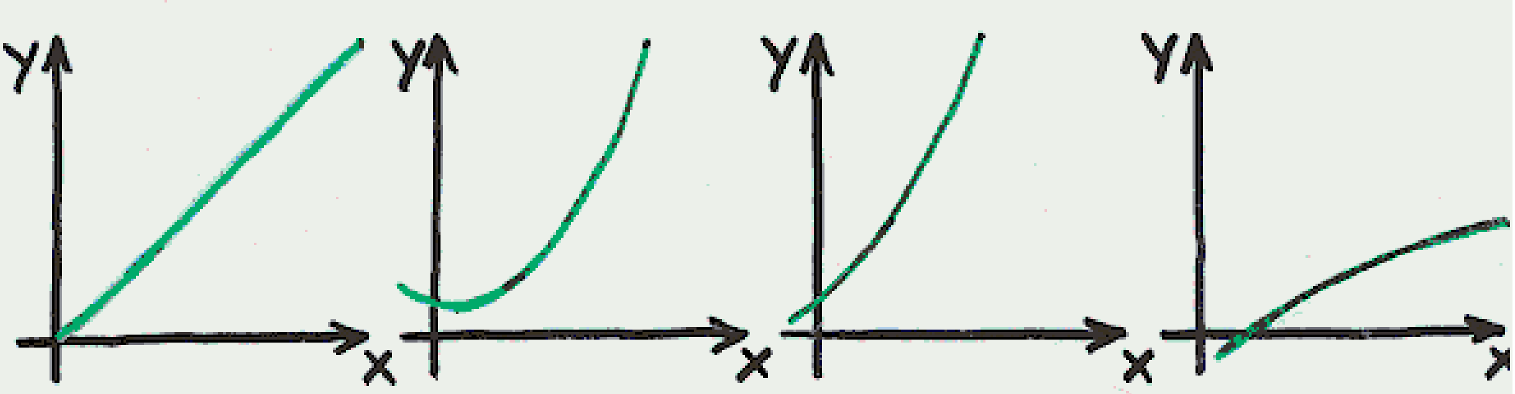


x számegyenese

y számegyenese

Jelöléssel: $x \mapsto f(x)$, ill. $y = f(x)$

Ábrázolásuk a Descartes-koord. rendszerben:



$y = x$ $y = x^2 - x + 1$ $y = e^x$ $y = \ln x$

2.

Az f fv.-nek x_0 helyen B a HATÁRÉRTÉKE,

ha $x \to x_0$, akkor $f(x) \to B$, ill. $\lim_{x \to x_0} f(x) = B$.

Az f fv. az x_0 HELYEN FOLYTONOS,

ha $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x<x_0)}} f(x) = \lim_{\substack{x_0 \leftarrow x \\ (x>x_0)}} f(x) = B$ és $B = f(x_0)$.

Az f fv. FOLYTONOS, ha minden $x = x_0$ helyen folytonos.

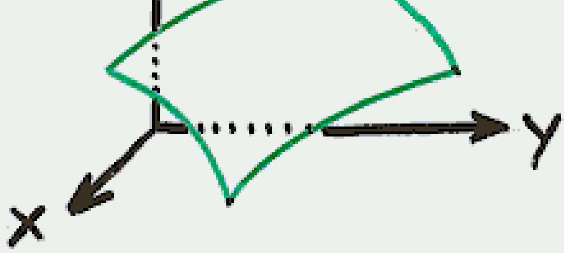
Ha h és g egyv. valós fv.-ek, akkor az $y = f(x) = h(g(x))$ összefüggéssel értelmezett f fv.-t a h és a g ÖSSZETETT FV.-ének nevezzük.

1.2. Kétváltozós valós függvények

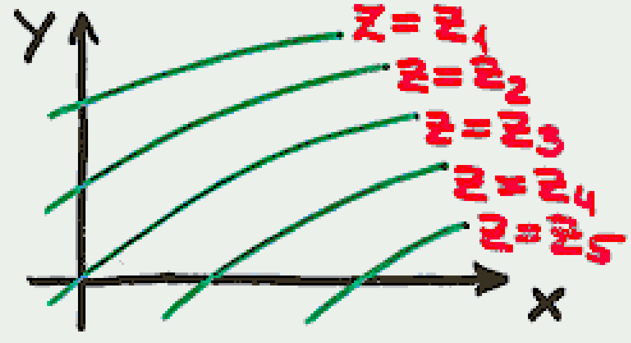
Jelölés: $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$; $y = f(x_1, x_2)$; $z = f(x, y)$

Ábrázolás:

x, y, z-koor. r.-ben egy felület



szintvonalas

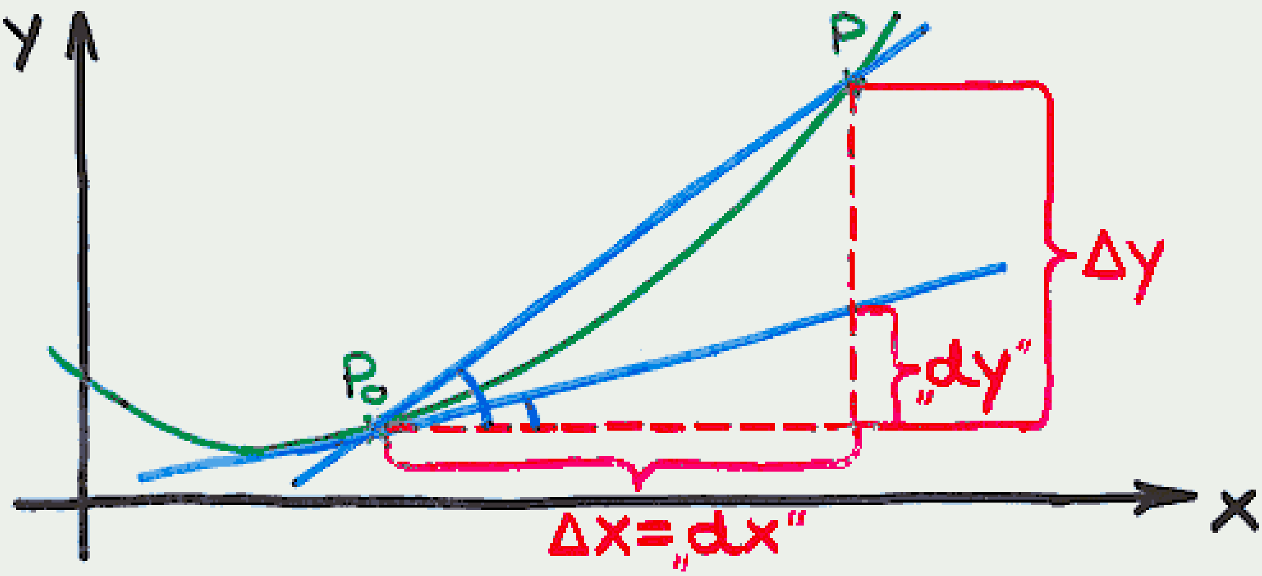


A szintvonal mentén z értéke konstans.

3.

2. Differenciálszámítás

2.1. Egyváltozós valós fv.-ek diff.számítása



Az $y=f(x)$ fv. KÜLÖNBSÉGI (DIFFERENCIA) HÁNYADOSA (φ) az x_0 helyen:

$$\varphi(x;x_0)=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad\left(=\operatorname{tg}\alpha=m\right)$$

Tehát $\varphi(x;x_0)$ a $P_0=P(x_0)$ és a $P=P(x)$ pontokhoz húzott szelő meredeksége (m).

Az f fv. DIFFERENCIÁLHÁNYADOSA az x_0 helyen ($f'(x_0)$): $\quad f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x;x_0)$

Az f fv. DIFFERENCIÁLHATÓ, ha minden $x=x_0$ helyen létezik $f'(x_0)$.

Ha az f fv. diff.-ható, akkor az $x\mapsto f'(x)$ hozzárendeléssel értelmezett f' fv. az f DERIVÁLTJA.

4.

A derivált fv. egyéb jelölései: $\frac{df}{dx}$, y', $\frac{dy}{dx}$.

Ha f' diff.-ható, akkor az $(f'(x))' \equiv f''(x)$ fv. az f MÁSODIK DERIVÁLTja.
Ha $f^{(n-1)}$ diff.-ható, akkor az $f^{(n)}$ fv. az f n-EDIK DERIVÁLTja.

DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK:

$f(x)=a$, $f'(x)=0$; $f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$;
$f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$; $f(x)=\cos x$; $f'(x)=-\sin x$;
$f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$; $f(x)=\ln x$, $f'(x)=1/x$

$(f\pm g)'=f'\pm g'$; $(fg)'=f'g+fg'$;

$\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ – LÁNCSZABÁLY

Az f fv. az x_0 helyen NÖVEKVŐ/CSÖKKENŐ, ha $f'(x_0)>0$/ $f'(x_0)<0$.

Legyen $f(x_0)$ az f fv. egy SZÉLSŐÉRTÉKE (LOKÁLIS MINIMUM vagy MAXIMUM). Ennek szükséges feltétele: $f'(x_0)=0$.
A lokális min./max. elégséges feltétele: $f''(x_0)>0$/$f''(x_0)<0$.

Az f fv.-nek az x_0 helyen INFLEXIója van, ha $f''(x_0)=0$.

5.

2.2. Többváltozós valós fv.-ek diff. számítása

Az $f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$ fv. x_k SZERINTI PARCIÁLIS DIFFERENCIÁL HÁNYADOSA (DERIVÁLTJA):

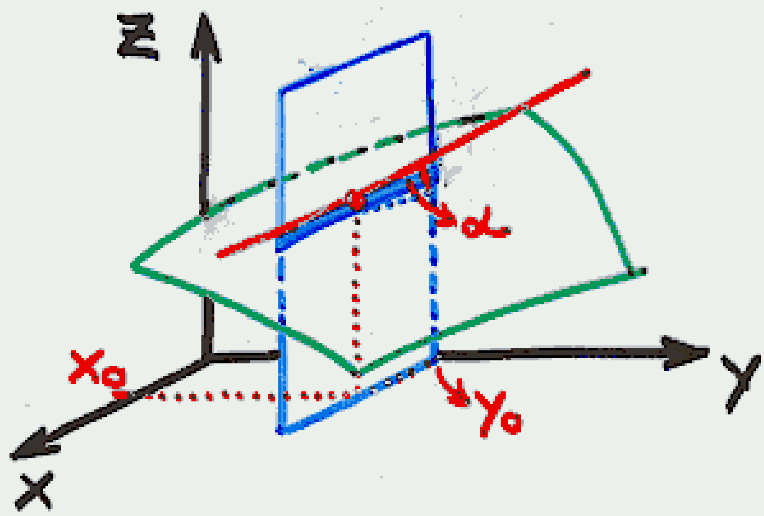
$$\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{x_k - x_k^0} \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_k}$$

Kétváltozós fv.-re ($z = f(x,y)$):

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y \quad \left(\begin{array}{l} f_x = f_x(x,y), \text{ ill.} \\ f_y = f_y(x,y) \end{array} \right)$$

Geometriai jelentése: pl. $f_x(x_0, y_0)$



Az $f(x,y)$ fv. TELJES DIFFERENCIÁLja (df):

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy.$$

Az $f(x(t), y(t))$ összetett fv. t-szerinti diff.-a:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$ (KÉTVÁLTOZÓS LÁNCSZABÁLY)

6.

3. Integrálszámítás

Tegyük fel, hogy az $f=f(x)$ fv. integrálható az a,b zárt intervallumon $(x \in [a,b])$!

Az $[a,b]$ egy Z_n felosztáshoz tartozó elemi $[x_{i-1}, x_i]$-ban $(i=1,2,\dots,n)$ legyen az f maximuma M_i, ill. minimuma m_i.

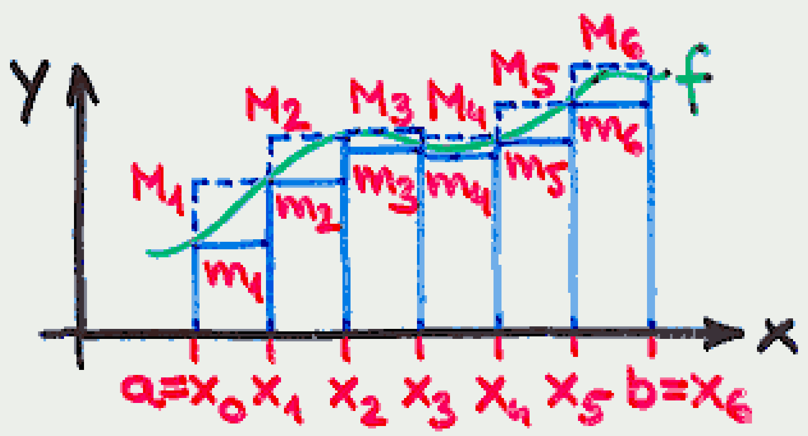
Ekkor:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = I$$

$(\Delta x_i \equiv x_i - x_{i-1})$

Az I határértéket nevezzük az $f(x)$ fv. $[a,b]$-hoz tartozó HATÁROZOTT INTEGRÁLjának, jelöléssel:

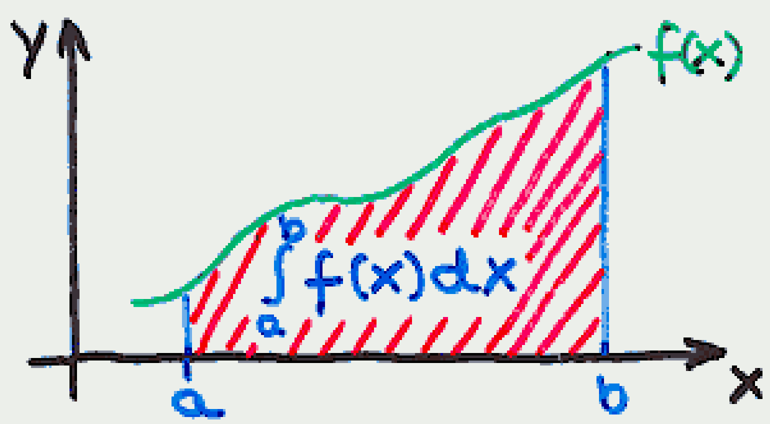
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$



Geometriai jelentés:

Ha $[a,b]$-on $f(x) \geq 0$, akkor

$\int_a^b f(x)\,dx$ az f fv. görbéje, az x-tengely, az $x=a$, ill. $x=b$ egyenesek által határolt terület.



7.

A határozott integrál tulajdonságai:

$\int_a^a f(x)dx=0$; $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$; $\int_a^b f(x)dx=$

$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$; $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$;

$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$;

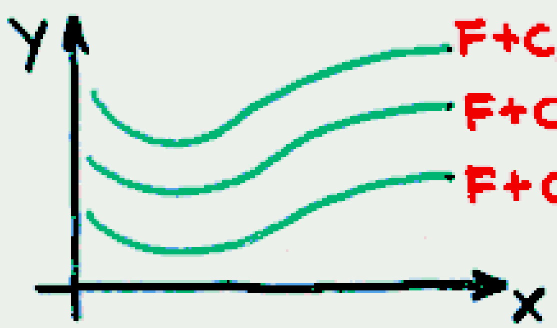
$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$, ahol $a\le\xi\le b$ és

$m\le f(\xi)\le M$ (KÖZÉPÉRTÉK-TÉTEL)

Az $F(x)$ fv. az $f(x)$ fv. PRIMITÍV FÜGGVÉNYE, ha $F'(x)=f(x)$.

Az $f(x)$ prim. fv.-ei csak egy konstansban (c) különbözhetnek egymástól, mivel

$(F(x)+c_1)'=(F(x)+c_2)'=F'(x)=f(x)$.



Az összes $F(x)+c$ fv. az $f(x)$ fv. HATÁROZATLAN INTEGRÁL-ja, jelöléssel:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

A határozott integrál kiszámítása a határozatlan int. segítségével (NEWTON-LEIBNITZ-TÉTEL)

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\equiv$

$\equiv F(x)\Big|_a^b$

$S(x)=$

$=F(x)-F(a)$

8.

A határozatlan int. tulajdonságai hasonlóak, mint a határozott int.-é.

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS (vö. $(fg)'$-vel):

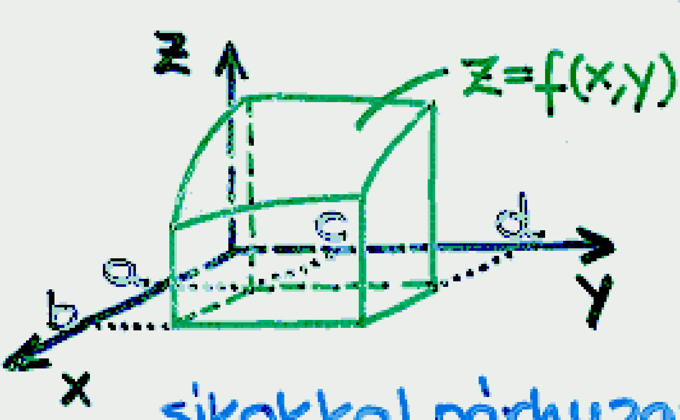
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS (vö. $f(g(x))'$-vel) határozott integrálok esetén:
ha $z=g(x)$ és $x=h(z)$ (g és h egymás INVERZ FV.-e), akkor

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz, \text{ ill.}$$

$$\int_\alpha^\beta f(z)dz = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(g(x))g'(x)dx.$$

KETTŐS INTEGRÁL (speciális eset): $I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$



geom.-i jelentés: I az (a,b,c,d) téglalap, a $z=f(x,y)$ felület, és az a-n, b-n, c-n, ill. d-n átfektetett, a koord. síkokkal párhuzamos síkok által bezárt térfogat

HÁRMASINTEGRÁL (spec.): ha egy test (x,y,z) pontjában a sűrűség értéke $\varrho(x,y,z)$, akkor a test tömege:

$$m=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varrho(x,y,z)dxdydz$$